Version: Dutch

Eerste dag
Woensdag 25 juli 2007

Opgave 1. Gegeven zijn reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Definieer

$$d_i = \max\left\{ a_j \;\middle|\; 1 \leqslant j \leqslant i \right\} - \min\left\{ a_j \;\middle|\; i \leqslant j \leqslant n \right\}$$

voor elke i ($1 \leqslant i \leqslant n$) en zij

$$d = \max\left\{ d_i \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

(a) Bewijs dat voor alle reële getallen $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ het volgende geldt:

$$\max\left\{ |x_i - a_i| \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant n \right\} \geqslant \frac{d}{2}. \tag{$*$}$$

(b) Bewijs dat er reële getallen $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ zijn zodanig dat gelijkheid geldt in $(*)$.

Opgave 2. Gegeven zijn vijf punten A, B, C, D en E zodanig dat $ABCD$ een parallellogram is en $BCED$ een koordenvierhoek. Zij ℓ een lijn (een rechte) door A, die het inwendige van het lijnstuk DC snijdt in F en die de lijn BC snijdt in G. Veronderstel dat $|EF| = |EG| = |EC|$.

Bewijs dat ℓ de bissectrice is van hoek DAB.

Opgave 3. Bij een wiskundewedstrijd zijn sommige deelnemers met elkaar bevriend. Vriendschap is altijd wederkerig. Noem een groep deelnemers een *kliek* als binnen die groep iedereen met ieder ander bevriend is. (In het bijzonder is elke groep van minder dan twee deelnemers een kliek.) Noem het aantal personen in een kliek de *omvang* van die kliek. Veronderstel dat de grootste omvang van de klieken bij deze wedstrijd even is.

Bewijs dat de deelnemers over twee zalen kunnen worden verdeeld zodanig dat de grootste omvang van de klieken in de ene zaal gelijk is aan de grootste omvang van de klieken in de andere zaal.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten