TOETS TRAININGSKAMP

Valkenswaard, 9 juni 2007

Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

1. Zij m een positief geheel getal. Bewijs dat voor alle positieve reële getallen a en b geldt:
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

2. Vier punten P, Q, R en S liggen in deze volgorde op een cirkel, zodat $\angle PSR = 90°$. Zij H en K de voetpunten van de loodlijnen uit Q op respectievelijk PR en PS. Zij T het snijpunt van HK en QS. Bewijs dat $|ST| = |TQ|$.

3. Je hebt 2007 kaarten. Op elke kaart is een positief geheel getal kleiner dan 2008 geschreven. Als je een aantal (minstens 1) van deze kaarten neemt, is de som van de getallen op de kaarten niet deelbaar door 2008. Bewijs dat op elke kaart hetzelfde getal staat.

4. Zij $n \geq 1$. Vind alle permutaties $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ van $(1, 2, \ldots, n)$ waarvoor geldt
$$\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \leq k+2 \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

5. Bewijs dat er oneindig veel paren positieve gehele getallen (x, y) zijn met
$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4.$$