

# TOETS TRAININGSKAMP

Valkenswaard, 10 juni 2006

Maak iedere opgave op een **apart** vel. Veel succes!

## Opgave 1.

Als we een verzameling punten in de ruimte hebben, mogen we een punt van de verzameling spiegelen in een ander punt van de verzameling en het beeld hiervan toevoegen aan de verzameling.

Als we beginnen met een verzameling bestaande uit zeven van de acht hoekpunten van een kubus, kunnen we dan het achtste hoekpunt in de verzameling krijgen na een eindig aantal stappen?

## Opgave 2.

In een groep van scholieren spreken 50 scholieren Duits, 50 scholieren Frans en 50 scholieren Spaans. Sommige scholieren spreken meer dan één taal.

Bewijs dat de scholieren in 5 groepen verdeeld kunnen worden zodat in elke groep precies 10 scholieren Duits spreken, 10 Frans en 10 Spaans.

## Opgave 3.

Cirkels  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$  snijden elkaar in  $P$  en  $Q$ . Zij  $A$  een punt op  $\Gamma_1$  niet gelijk aan  $P$  of  $Q$ . De lijnen  $AP$  en  $AQ$  snijden  $\Gamma_2$  nogmaals in respectievelijk  $B$  en  $C$ .

Bewijs dat de hoogtelijn uit  $A$  in driehoek  $ABC$  door een punt gaat dat onafhankelijk is van de keuze van  $A$ .

## Opgave 4.

Zij  $\mathbb{R}_{>0}$  de verzameling van positieve reële getallen. Laat  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeven zijn.

Vind alle functies  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  zodanig dat  $f(a) = 1$  en

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}: f(x)f(y) + f\left(\frac{a}{x}\right)f\left(\frac{a}{y}\right) = 2f(xy).$$

## Opgave 5.

Zij  $\lfloor x \rfloor$  het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan  $x$ . Laat  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 7$  gegeven zijn.

Bewijs dat  $\binom{n}{7} - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor$  deelbaar is door 7.