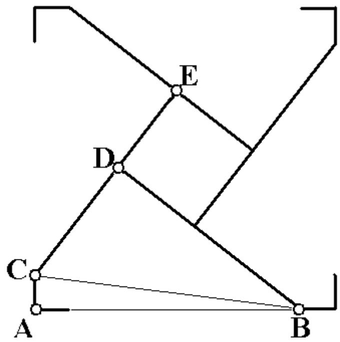
Eerste ronde 2002. Uitwerkingen.

A1. Minstens één eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent dat er minstens 7 eurocenten bij de 26 munten moeten zitten. Minstens twee munten van 2 eurocent bij iedere greep van 20 munten betekent minstens 8 munten van 2 eurocent bij de 26 en tenslotte vijf munten van 5 eurocent betekent minstens 11 munten van 5 eurocent bij de 26 munten. Omdat er in totaal 26 munten zijn, moeten er dus precies zeven munten van 1 cent, acht van 2 cent en elf van 5 cent zijn. Die zijn samen 78 eurocent waard.

A2. Bekijk alleen de combinaties met een rode driehoek in het midden.
Geef de drie resterende driehoeken allemaal dezelfde kleur. Dan zijn er drie mogelijkheden.
Geef twee van de drie resterende driehoeken dezelfde kleur en de derde een andere kleur, dan zijn er 3×2 mogelijkheden wat betreft de kleuren. Maar elke kleurencombinatie geeft maar één oplossing, dus met twee verschillende kleuren bij de drie buitenste driehoeken zijn er 6 oplossingen.
Geef de drie buitenste driehoeken drie verschillende kleuren. Dat geeft één mogelijkheid wat betreft de kleuren, maar twee mogelijke oplossingen die elkaars spiegelbeeld zijn.
In totaal dus: 3+6+2=11 mogelijkheden met een rode driehoek in het midden.
Bij drie mogelijke kleuren voor de middelste driehoek dus in totaal 33 oplossingen.

A3. Tel al de vergelijkingen bij elkaar op: $5a+5b+5c+5d+5e+5f=105$, dus $a+b+c+d+e+f=21$.
Trek de eerste vergelijking hier van af, dan vind je: f=1. Vervolgens vind je zo: $e=2, d=3, c=4, b=5$ en $a=6$. Dus $a\times b\times c\times d\times e\times f=720$.

A4. Zie figuur: $AB=80, AC=10$
dus $BC^2=80^2+10^2=6500$.
$CD^2+BD^2=6500$, dus $CD^2=6500-70^2=1600$.
Dus $CD=40$ en $DE=CE-CD=70-40=30$.
Dus de gevraagde oppervlakte is 900 .



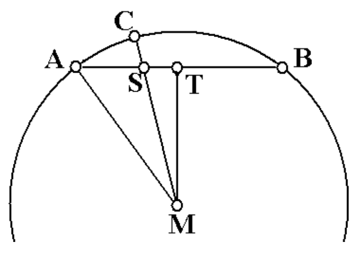
A5. $(a,b,c)\to(ab,bc,ca)\to(ab^2c,bc^2a,ca^2b)=(b(abc),c(abc),a(abc))\to(bc(abc)^2,ca(abc)^2,ab(abc)^2)\to$ $(c(abc)^5,a(abc)^5,b(abc)^5)\to(ca(abc)^{10},ab(abc)^{10},bc(abc)^{10})\to(a(abc)^{21},b(abc)^{21},c(abc)^{21})$, dus $p=(abc)^{21}$.

B1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ dus $1000^2-999^2=1\times 1999$. De gevraagde som is dus gelijk aan:
$1999+1995+1991+...+7+3$. Dat zijn 500 getallen (2000, 1996, ... , 4 ofwel 500, 499, ... , 1) .

Som =	1999	+	1995	+	...	+	7	+	3	
Som =	3	+	7	+	...	+	1995	+	1999	Verticaal optellen; elke tweetal geeft 2002.
$2\times$Som=	2002	+	2002	+	...	+	2002	+	2002	

Voor de Som vinden we zo 500 maal 2002 gedeeld door 2, dus $500\times 1001=500500$.

B2. Laat de loodlijn vanuit M op de koorde AB.
Noem het voetpunt van de loodlijn T.
T is het midden van AB.
Noem de lengte van de straal r.
$AT^2+TM^2=r^2$, dus $16+TM^2=r^2$ (1)
$ST^2+TM^2=SM^2$, dus $1+TM^2=(r-1)^2$ (2)
(1) - (2) levert $15=r^2-(r-1)^2=2r-1$, dus $r=8$.



B3. Ga uit van 10 uur precies. De kleine wijzer maakt een hoek van $60°$ met de verticale lijn door 12 en 6. De grote wijzer een hoek van $0°$ met de zelfde lijn. In een uur loopt de grote wijzer één keer helemaal rond, de kleine wijzer draait een uur, dat is $30°$ verder. De grote wijzer draait dus 12 keer zo snel als de kleine. Veronderstel dat de hoek waarover de grote wijzer moet draaien tot de symmetrische stand gelijk is aan φ. Dan is de hoek waarover de kleine wijzer in dezelfde tijd draait gelijk aan $\frac{\varphi}{12}$. De hoek die de kleine wijzer dan maakt met de verticale as is dan gelijk aan $60-\frac{\varphi}{12}$.

Er moet gelden $\varphi = 60-\frac{\varphi}{12}$, dus $\frac{13}{12}\varphi = 60$ en $\varphi = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13}$ graad.

De hoek tussen de wijzers is dan gelijk aan $2\times\varphi = 110\frac{10}{13}$ graad.

B4. Plaats het middelpunt van de bol in de oorsprong en beschouw een achtste deel van de kubus met een achtste deel van de bol er in. Het is duidelijk dat de kubusjes aan de buitenkant niet geheel binnen de bol liggen. Liggen alle resterende kubusjes ($2\times2\times2$) geheel binnen de bol?
Het hoekpunt dat het verst van de oorsprong ligt, ligt op twee maal een lichaamsdiagonaallengte van de oorspong en dat is $2\times\sqrt{3}$ en dat is meer dan 3. De resterende 7 eenheidskubusjes liggen binnen de bol, want de drie hoekpunten die het verst van de oorsprong liggen, liggen op een afstand $\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$ van de oorsprong en dus precies op het boloppervlak.
In totaal liggen er dus $8\times7=56$ eenheidskubusjes binnen de bol.