Dutch Version — Nederlandse versie

Eerste dag

Glasgow, 24 juli 2002

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.
Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Opgave 1.

Zij n een positief geheel getal. Zij T de verzameling van punten (x, y) in het platte vlak, waarbij x en y niet-negatieve gehele getallen zijn met $x + y < n$. Ieder punt van T is rood of blauw. Als een punt (x, y) van T rood is, dan zijn ook alle punten (x', y') rood met $x' \leq x$ en $y' \leq y$.

Een X-verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle x-coördinaten verschillend zijn. Een Y-verzameling is een verzameling van n blauwe punten waarvan alle y-coördinaten verschillend zijn.

Bewijs dat het aantal X-verzamelingen gelijk is aan het aantal Y-verzamelingen.

Opgave 2.

Zij BC een middellijn van de cirkel Γ met middelpunt O. Zij A een punt op Γ zodanig dat $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Zij D het midden van de boog AB die C niet bevat. De lijn door O evenwijdig met DA snijdt AC in J. De middelloodlijn van OA snijdt Γ in E en F.

Bewijs dat J het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van $\triangle CEF$.

Opgave 3.

Bepaal alle paren van gehele getallen $m, n \geq 3$ zodanig dat er oneindig veel positieve gehele getallen a bestaan waarvoor

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

geheel is.

Dutch version Nederlandse versie

Tweede dag

Glasgow, 25 juli 2002

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur.
Voor iedere opgave maximaal 7 punten.

Opgave 4.
Zij n een geheel getal groter dan 1. De positieve delers van n zijn $d_1, d_2, \ldots, d_k$, waarbij

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Definieer $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.

(a) Bewijs dat $D < n^2$.

(b) Bepaal alle getallen n waarvoor D een deler is van n^2.

Opgave 5.
Bepaal alle functies f van de reële getallen naar de reële getallen, zodanig dat voor alle reële getallen x, y, z en t geldt

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Opgave 6.
Beschouw in het platte vlak de cirkels $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ met straal 1, waarbij $n \geq 3$. De middelpunten van deze cirkels zijn respectievelijk $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Geen enkele rechte lijn in het vlak snijdt of raakt meer dan twee van deze cirkels.

Bewijs dat

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$